
	SECRETARIA DE EDUCACION MUNICIPAL I.E. GIMNASIO GRAN COLOMBIANO	PAG 1	
	GESTION DE CALIDAD PROCESO DE FORMACION Y EVALUACION	F-M-FM-EI	
	GUIA DE APRENDIZAJE MATEMATICAS	V1 2020	

GUÍA 7 MATEMATICAS 10

NIVEL: BÁSICA SECUNDARIA.

GRADO: Décimo

FECHA: 5 de agosto de 2020

No. DE CLASES: 8 HORAS, es decir dos semanas

OBJETIVO: Reconocer las funciones trigonométricas y su importancia en la solución de problemas cotidianos. Realiza cálculos de ángulos a partir de las razones trigonométricas.

ESTÁNDAR: **Pensamiento variacional y sistemas algebraicos analíticos**

- Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan.

COMPETENCIA: Utilizo el círculo unitario como herramienta para entender las funciones trigonométricas.

DBA: Identifica y calcula ángulos y distancias a partir de la relación de las funciones trigonométricas.

RESULTADO DE APRENDIZAJE ESPERADO: Comprender la función de las relaciones trigonométricas y su aplicabilidad.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

QUERIDO ESTUDIANTE:

POR FAVOR COPIA Y LEE TODA LA TEORÍA PARA QUE PUEDAS RESOLVER LOS EJERCICIOS PLANTEADOS. PUEDES ACLARAR DUDAS DE CADA TEMA, EN LOS TUTORIALES DE YOU TUBE. **No olvides enviar un solo archivo de todas las actividades.**

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS



HISTORIA (LECTURA)

La historia de la trigonometría se remonta a las primeras matemáticas conocidas, en Egipto y Babilonia. Los egipcios establecieron la medida de los ángulos en grados, minutos y segundos. Sin embargo, hasta los tiempos de la Grecia clásica no empezó a haber trigonometría en las matemáticas.

En el siglo II a.C. el astrónomo Hiparco de Nicea recopiló una tabla trigonométrica para resolver triángulos. Comenzando con un ángulo de 71° y yendo hasta 180° con incrementos de 71° , la tabla daba la longitud de la cuerda delimitada por los lados del ángulo central dado que corta a una circunferencia de radio r . Esta tabla es similar a la moderna tabla del seno. No se sabe con certeza el valor de r utilizado por Hiparco, pero sí se sabe que 300 años más tarde el astrónomo Tolomeo utilizó $r = 60$, pues los griegos adoptaron el sistema numérico sexagesimal (base 60) de los babilonios.



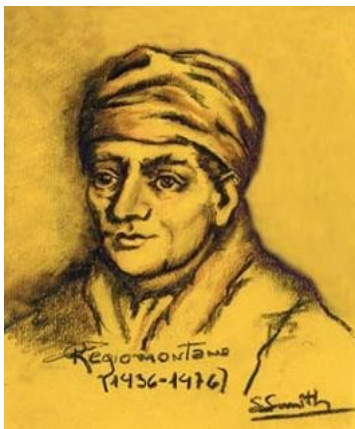
Tolomeo incorporó en su gran libro de astronomía, el Almagesto, una tabla de cuerdas con incrementos angulares de 1° , desde 0° a 180° , con un error menor que $1/3.600$ de unidad. También explicó su método para compilar esta tabla de cuerdas, y a lo largo del libro dio bastantes ejemplos de cómo utilizar la tabla para calcular los elementos desconocidos de un triángulo a partir de los conocidos. Tolomeo fue el autor del que hoy se conoce como teorema de Menelao para resolver triángulos esféricos, y durante muchos siglos su trigonometría fue la introducción básica para los astrónomos. Quizás al mismo tiempo que Tolomeo los astrónomos de la India

	SECRETARIA DE EDUCACION MUNICIPAL I.E. GIMNASIO GRAN COLOMBIANO	PAG 1	
	GESTION DE CALIDAD PROCESO DE FORMACION Y EVALUACION	F-M-FM-EI	
	GUIA DE APRENDIZAJE MATEMATICAS	V1 2020	

habían desarrollado también un sistema trigonométrico basado en la función seno en vez de cuerdas como los griegos. Esta función seno, al contrario que el seno utilizado en la actualidad, no era una proporción, sino la longitud del lado opuesto a un ángulo en un triángulo rectángulo de hipotenusa dada. Los matemáticos indios utilizaron diversos valores para ésta en sus tablas.

En el siglo II a.C. el astrónomo Hiparco de Nicea recopiló una tabla trigonométrica para resolver triángulos. Comenzando con un ángulo de 71° y yendo hasta 180° con incrementos de 71° , la tabla daba la longitud de la cuerda delimitada por los lados del ángulo central dado que corta a una circunferencia de radio r . Esta tabla es similar a la moderna tabla del seno. No se sabe con certeza el valor de r utilizado por Hiparco, pero sí se sabe que 300 años más tarde el astrónomo Tolomeo utilizó $r = 60$, pues los griegos adoptaron el sistema numérico sexagesimal (base 60) de los babilonios.

A finales del siglo VIII los astrónomos árabes habían recibido la herencia de las tradiciones de Grecia y de la India, y prefirieron trabajar con la función seno. En las últimas décadas del siglo X ya habían completado la función seno y las otras cinco funciones y habían descubierto y demostrado varios teoremas fundamentales de la trigonometría tanto para triángulos planos como esféricos. Varios matemáticos sugirieron el uso del valor $r = 1$ en vez de $r = 60$, lo que produjo los valores modernos de las funciones trigonométricas. Los árabes también incorporaron el triángulo polar en los triángulos esféricos. Todos estos descubrimientos se aplicaron a la astronomía y también se utilizaron para medir el tiempo astronómico y para encontrar la dirección de la Meca, lo que era necesario para las cinco oraciones diarias requeridas por la ley islámica.



Los científicos árabes también compilaron tablas de gran exactitud. Por ejemplo, las tablas del seno y de la tangente, construidas con intervalos de $1/60$ de grado (1 minuto) tenían un error menor que 1 dividido por 700 millones. Además, el gran astrónomo Nasir al-Din al-Tusi escribió el Libro de la figura transversal, el primer estudio de las trigonometrías plana y esférica como ciencias matemáticas independientes.

El occidente latino se familiarizó con la trigonometría árabe a través de traducciones de libros de astronomía arábigos, que comenzaron a aparecer en el siglo XII.

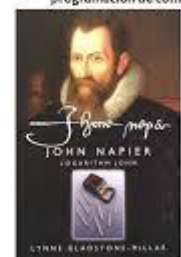
El primer trabajo importante en esta materia en Europa fue escrito por el matemático y astrónomo alemán Johann Müller, llamado Regiomontano.



Durante el siguiente siglo, el también astrónomo alemán Georges Joachim, conocido como Rético, introdujo el concepto moderno de funciones trigonométricas como proporciones en vez de longitudes de ciertas líneas.

El matemático francés François Viète incorporó el triángulo polar en la trigonometría esférica y encontró fórmulas para expresar las funciones de ángulos múltiples, $\sin nq$ y $\cos nq$, en función de potencias de $\sin q$ y $\cos q$.

LOGARITMOS JOHN NAPIER 1614

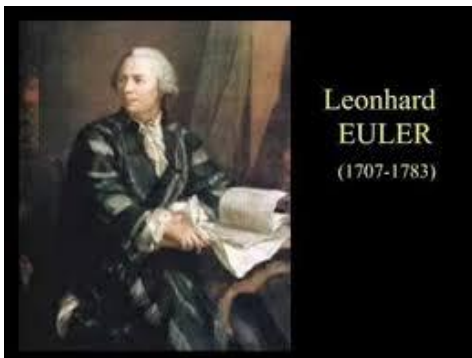
El escocés John Napier inventa este concepto matemático que resultará crucial para la programación de computo.



	SECRETARIA DE EDUCACION MUNICIPAL I.E. GIMNASIO GRAN COLOMBIANO	PAG 1	
	GESTION DE CALIDAD PROCESO DE FORMACION Y EVALUACION	F-M-FM-EI	
	GUIA DE APRENDIZAJE MATEMATICAS	V1 2020	

Los cálculos trigonométricos recibieron un gran empuje gracias al matemático escocés John Napier, quien inventó los logaritmos a principios del siglo XVII. También encontró reglas mnemotécnicas para resolver triángulos esféricos, y algunas proporciones (llamadas analogías de Napier) para resolver triángulos esféricos oblicuos.

Casi exactamente medio siglo después de la publicación de los logaritmos de Napier, Isaac Newton inventó el cálculo diferencial e integral. Uno de los fundamentos del trabajo de Newton fue la representación de muchas funciones matemáticas utilizando series infinitas de potencias de la variable x . Newton encontró la serie para el $\sin x$ y series similares para el $\cos x$ y la $\tan x$. Con la invención del cálculo las funciones trigonométricas fueron incorporadas al análisis, donde todavía hoy desempeñan un importante papel tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas.



Por último, en el siglo XVIII, el matemático suizo Leonhard Euler definió las funciones trigonométricas utilizando expresiones con exponenciales de números complejos.

Esto convirtió a la trigonometría en sólo una de las muchas aplicaciones de los números complejos; además, Euler demostró que las propiedades básicas de la trigonometría eran simplemente producto de la aritmética de los números complejos.

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

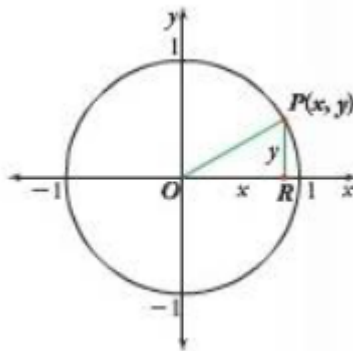
Las funciones trigonométricas se pueden estudiar de dos formas: a partir de las relaciones entre los ángulos y los lados de un triángulo rectángulo o a partir de la circunferencia unitaria como funciones de números reales.



A continuación, se presenta la circunferencia unitaria y como se establecen las funciones trigonométricas a partir de esta.

Circunferencia Unitaria:

La circunferencia unitaria es aquella cuyo centro está en el origen y cuyo radio es igual a 1.

En la figura se muestra una circunferencia de radio $r=1$. El punto P pertenece a la circunferencia y las coordenadas x , y corresponden a las medidas de los catetos del triángulo rectángulo ORP .



	SECRETARIA DE EDUCACION MUNICIPAL I.E. GIMNASIO GRAN COLOMBIANO	PAG 1	
	GESTION DE CALIDAD PROCESO DE FORMACION Y EVALUACION	F-M-FM-EI	
	GUIA DE APRENDIZAJE MATEMATICAS	V1 2020	

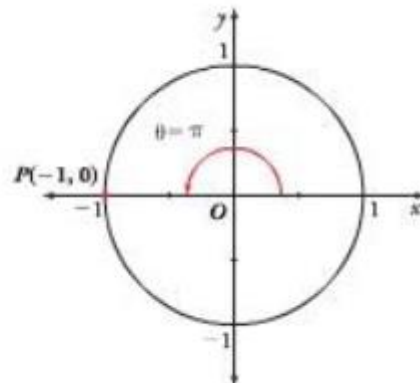
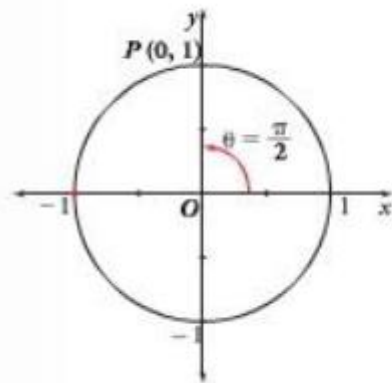
Para la circunferencia se tiene que el ángulo de una vuelta completa que equivale a 360° , se puede expresar en radianes (circunferencia = 2π). Por tanto, en la siguiente gráfica donde se tiene un ángulo θ se obtienen cuatro cuadrantes cada uno con un valor de $\frac{\pi}{2}$.

$$90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

$$180^\circ = \pi$$

$$270^\circ = \frac{3\pi}{2}$$

$$360^\circ = 2\pi$$





Cuando el ángulo medido se toma siguiendo las manecillas del reloj (sentido horario – derecha) el ángulo es **NEGATIVO**.

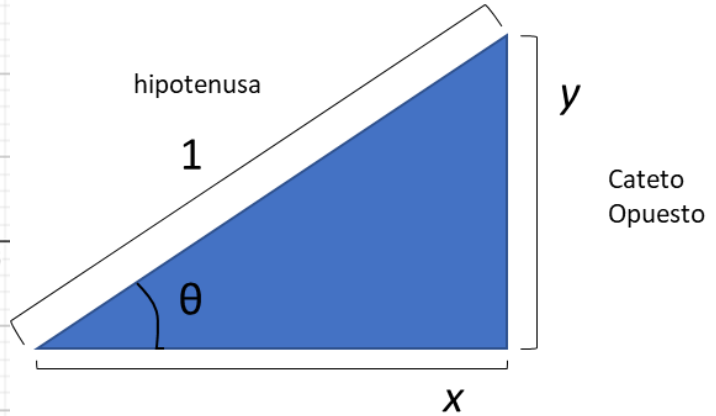
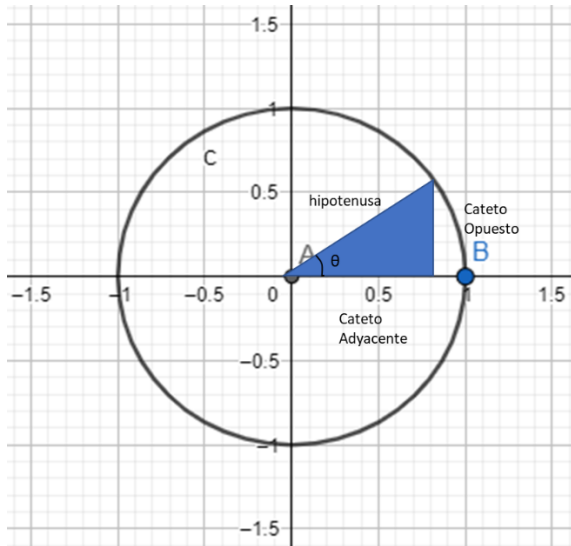
Cuando el ángulo medido se toma contrario a las manecillas del reloj (sentido antihorario – izquierda) el ángulo es **POSITIVO**.

Definición de funciones trigonométricas

Pueden definirse a partir de la circunferencia unitaria. Para esto se construye un ángulo θ en posición normal cuyo lado final intercepte a la circunferencia unitaria en el punto P. Como cada ángulo define un único punto P(x,y) en la circunferencia unitaria, a partir de sus coordenadas se pueden definir las funciones trigonométricas seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente de la siguiente manera:

Razones trigonométricas: a partir de la definición anterior se tiene en el siguiente gráfico las características y nombres del triángulo que se forma a partir de la circunferencia unitaria y donde se definen las razones trigonométricas.

	SECRETARIA DE EDUCACION MUNICIPAL I.E. GIMNASIO GRAN COLOMBIANO	PAG 1	
	GESTION DE CALIDAD PROCESO DE FORMACION Y EVALUACION	F-M-FM-EI	
	GUIA DE APRENDIZAJE MATEMATICAS	V1 2020	



$$\cos \theta = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{x}{1}$$

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{y}{1}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}} = \frac{y}{x}$$

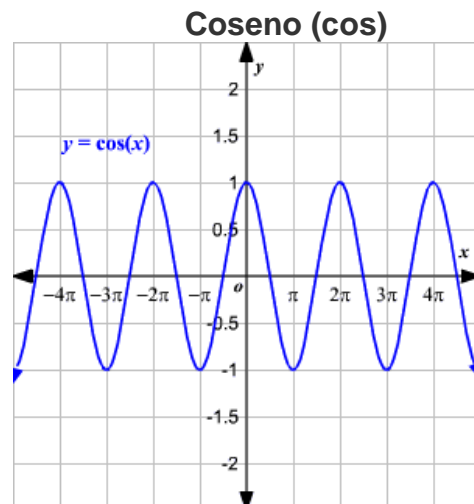
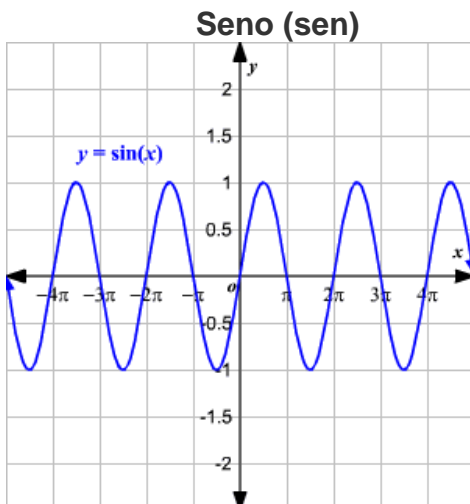
$$\sec \theta = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto adyacente}} = \frac{1}{x}$$

$$\text{csc } \theta = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto opuesto}} = \frac{1}{y}$$

$$\cot \theta = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Cateto opuesto}} = \frac{x}{y}$$



*Seno (sen), Coseno (cos), Tangente (tan), Secante (sec), Cosecante (csc), Cotangente (cot).

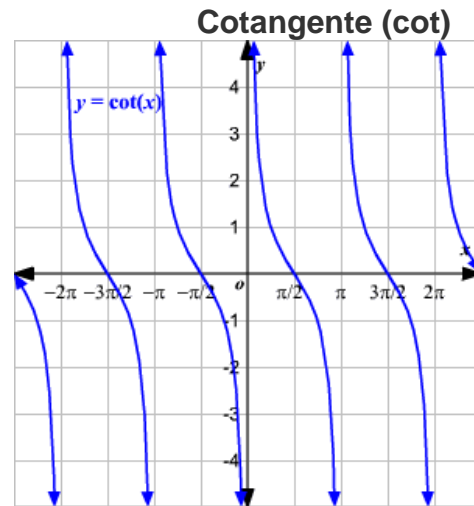
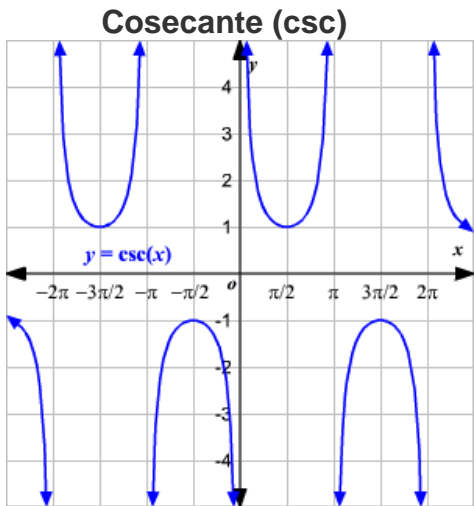
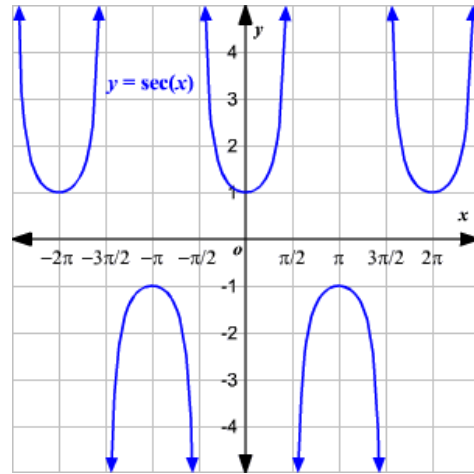
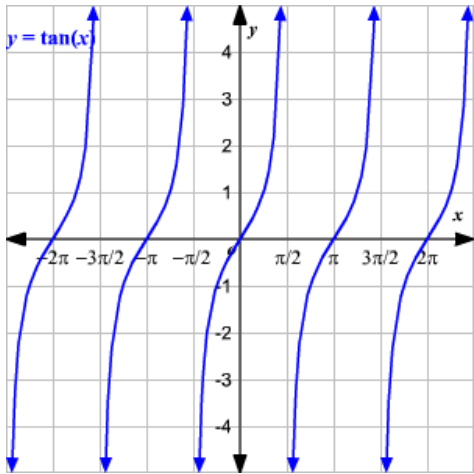
Grafica de las funciones trigonométricas



Tangente (tan)

Secante (sec)

	SECRETARIA DE EDUCACION MUNICIPAL I.E. GIMNASIO GRAN COLOMBIANO	PAG 1	
	GESTION DE CALIDAD PROCESO DE FORMACION Y EVALUACION	F-M-FM-EI	
	GUIA DE APRENDIZAJE MATEMATICAS	V1 2020	





Ejemplo:

1. Determinar el punto P de la circunferencia unitaria partir del ángulo θ en posición normal.
2. Encontrar los valores de las razones trigonométricas para el ángulo θ del triángulo LMN.

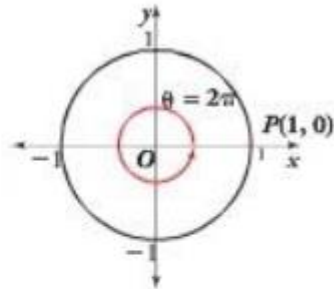
Solución

- 1.

	SECRETARIA DE EDUCACION MUNICIPAL I.E. GIMNASIO GRAN COLOMBIANO	PAG 1	
	GESTION DE CALIDAD PROCESO DE FORMACION Y EVALUACION	F-M-FM-EI	
	GUIA DE APRENDIZAJE MATEMATICAS	V1 2020	

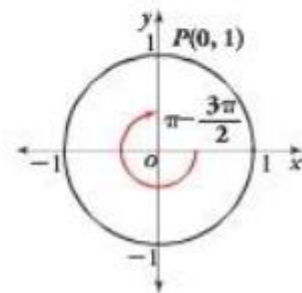
a. $\theta = 2\pi$

Se traza la circunferencia unitaria y se construye el ángulo $\theta = 2\pi$, teniendo en cuenta que es positivo. Como el lado final coincide con el lado inicial entonces, este interseca a la circunferencia unitaria en el punto $P(1, 0)$.

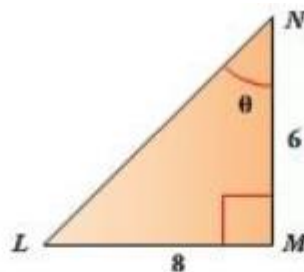


b. $\pi = -\frac{3}{2}\pi$

En este caso el ángulo $\pi = -\frac{3}{2}\pi$ es negativo, por esta razón el arco que subtiende se define en el sentido de las manecillas del reloj. Como el lado final coincide con el lado inicial y positivo, entonces el punto en el que interseca a la circunferencia unitaria es $P(0, 1)$.



2.



Primero, se calcula la medida de la hipotenusa.

$$(LN)^2 = (NM)^2 + (ML)^2 \quad \text{Se aplica el teorema de Pitágoras.}$$

$$(LN)^2 = (6)^2 + (8)^2 \quad \text{Se rempazan las medidas de los catetos.}$$

$$(LN)^2 = 36 + 64 \quad \text{Se resuelven las potencias.}$$

$$(LN)^2 = 100 \quad \text{Se efectúa la suma.}$$



$$LN = \sqrt{100} = 10 \quad \text{Se extrae la raíz cuadrada.}$$

Luego, se tiene que \overline{NM} es el cateto adyacente al ángulo θ , mientras que \overline{ML} es el cateto opuesto.

Finalmente, se rempazan las medidas de los catetos y de la hipotenusa para calcular las razones trigonométricas.

$$\text{sen } \theta = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \quad \tan \theta = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \quad \sec \theta = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$\text{cos } \theta = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \quad \cot \theta = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \quad \text{csc } \theta = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

	SECRETARIA DE EDUCACION MUNICIPAL I.E. GIMNASIO GRAN COLOMBIANO	PAG 1	
	GESTION DE CALIDAD PROCESO DE FORMACION Y EVALUACION	F-M-FM-EI	
	GUIA DE APRENDIZAJE MATEMATICAS	V1 2020	

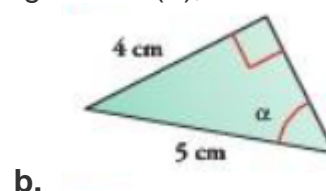
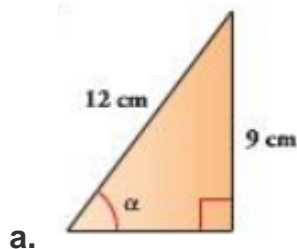
Ejercicios para desarrollar:

1. Grafica en la circunferencia unitaria un ángulo que quede determinado por le punto P

a. $P\left(\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$

b. $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

2. Halla el valor de las funciones trigonométricas para el ángulo alfa (α), en cada triángulo



ACTIVIDADES A DESARROLLAR:



- Lee con mucha atención (lectura) y **realiza un resumen de la misma en una línea de tiempo en el cuaderno**. Copia la teoría de funciones en su cuaderno, soluciona los ejercicios planteados paso a paso justificando sus respuestas.
- Soluciona del libro Mate-retos 10, las páginas:15
- Soluciona del Interactuemos 10, las páginas: 8, numerales 1, 2 y 3
- Tómale fotos a todo las actividades planteadas y los talleres solucionados, paso a paso, justificando la respuesta y la envías **en un solo archivo Word o PDF**, al correo que se encuentra al finalizar la actividad, anotando tu nombre completo, grado y fecha.


CRITERIOS DE EVALUACIÓN

- Presentar todas las actividades planteadas en este taller, desarrolladas paso a paso, en el cuaderno de matemáticas, enviar fotos **en un solo archivo e Word o PDF**, del trabajo realizado, al correo que se encuentra a al finalizar la actividad, evidenciando el procedimiento de la respuesta verdadera, para ser valorados.

BIBLIOGRAFÍA E INFOGRAFÍA:

- Caminos del saber Matemáticas grado décimo, editorial Santillana.
- Lic. Jesús Antonio Anzola Rubio y otros. Interactuemos 10. Didáctica y Matemáticas Ltda. Bogotá, Diciembre 2017.
- Lic. Jesús Antonio Anzola Rubio y otros. Mate-Retos 10. Didáctica y Matemáticas Ltda. Bogotá, Noviembre 2018.
- www.colombiaaprende.gov.co/matemáticas
- <https://sites.google.com/site/razones1883/historia>
- Circunferencia Unitaria en: <https://www.youtube.com/watch?v=2XmvjizntV0>

	SECRETARIA DE EDUCACION MUNICIPAL I.E. GIMNASIO GRAN COLOMBIANO	PAG 1	
	GESTION DE CALIDAD PROCESO DE FORMACION Y EVALUACION	F-M-FM-EI	
	GUIA DE APRENDIZAJE MATEMATICAS	V1 2020	

 *matesfacil*

<https://padlet.com/Matesfacil/bachillerato>

DATOS DEL DOCENTE:

NUBIA LUCIA CASTILLO CASTELLANOS. nubia.castillo@gimnasiograncolombiano.edu.co